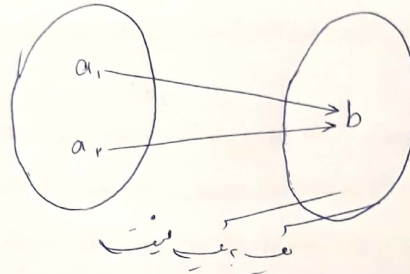


۹۸، ۱، ۲۳

لیست
حلیه هفتم و هشتم

ریاضیات
تابع

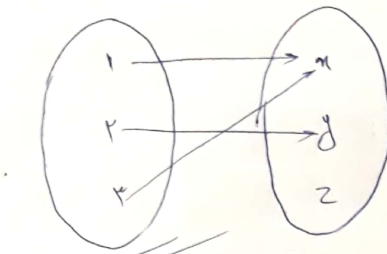
تابع $f: A \rightarrow B$ یک یا آنرا گنجه داریم اگر هر عنصر B حداقل یک
عنصر A به عنوان نگاره نگار f ظاهر شود.



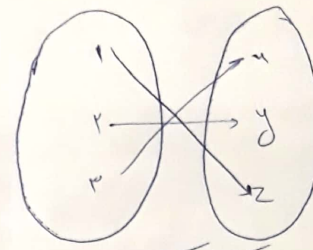
۱. اگر A و B مجموعه ها متناهی باشند و $f: A \rightarrow B$ تابعی یک به یک باشد
باید داشته باشیم $|A| \leq |B|$.

۲. برای مجموعه های A و B اگر $f: A \rightarrow B$ تابعی یک به یک باشد
آنرا $a_1, a_2 \in A$ داریم

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$



تابع همب یک به یک نیست



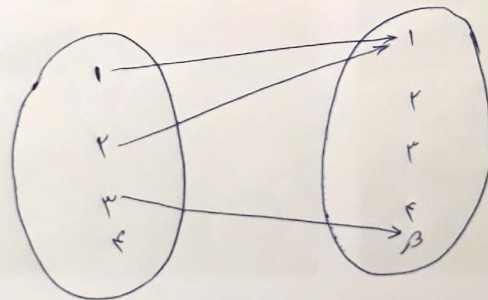
تابع همب یک به یک

مثال:

اگر f تابع همب یک به یک باشد، در این صورت هر عنصر B حداقل یک بار به عنوان مولفه دوم از یک زوج مرتب ظاهر می شود.

مثال: فرض کنید $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

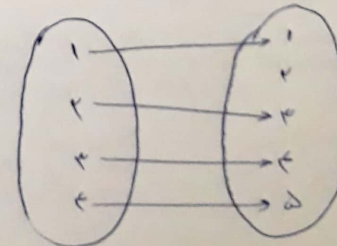
$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 5)\}$



یک به یک نیست

$g = \{(1, 1), (2, 4), (4, 5), (3, 4)\}$

تابع همب یک به یک



در مثال قبل برای A, B همان $2 = 2$ ^{۴×۵} رابطه از A به B در حوز داده

۵ تابع از $A \rightarrow B$ و حوز داده

بررسی دیگری که طبقاً داریم آن تابع هم اینست که چند تابع از A به B در حوز داده به طوری که تابع یک به یک باشد

برای مجموعه ها $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

هر تابع یک به یک $f: A \rightarrow B$ را به صورت

$\{(a_1, u_1), (a_2, u_2), \dots, (a_m, u_m)\}$

در نظر می گیریم. حال چون میان m مولفه ها m مولفه می توانیم بنویسیم

بنابر و بنابر مولفه ها m تکراری باشد پس برای n انتخاب داریم

و برابر $n-1$ انتخاب و در نهایت برای $n-m+1$

انتخاب داریم. بنا بر این طبق اصل ضرب تعداد توابع از A به B

که یک به یک باشد برابر است با:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \longrightarrow & n \\ x_2 & \longrightarrow & n-1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_m & \longrightarrow & n-m+1 \end{array}$$

تعداد ترتیبی یک = $n \times (n-1) \times \dots \times (n-m+1)$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4\}$. داریم صورت
چند ترتیبی یک از A به B و خود را.

حل: داریم $m = |A| = 3$ و $n = |B| = 4$. داریم

$$4 \times (4-1) \times (4-2) = 4 \times 3 \times 2 = \underline{\underline{24}}$$

نکته: اگر $f: A \rightarrow B$ و $A_1 \subseteq A$ ، داریم صورت

$$f(A_1) = \{b \in B \mid f(a) = b, a \in A_1\}$$

رابطه A_1 تحت تابع f می نامیم.

قضیه: فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $A_1, A_2 \subseteq A$ ، شرایط صدق

$$1) f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

$$2) f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

۳) اگر f تکثیر یک به یک باشد، شرایط صدق

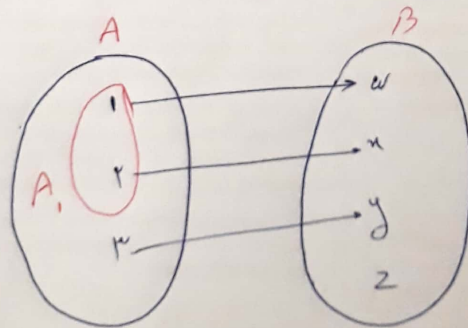
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

تعریف: اگر $f: A \rightarrow B$ و A_1 زیر مجموعه ای از A باشد تابع

$$f|_{A_1}: A_1 \rightarrow B$$

یا محدود تابع f بر A_1 نام گرفته، اگر $a \in A_1$ داریم

$$f(a) = f|_{A_1}(a).$$

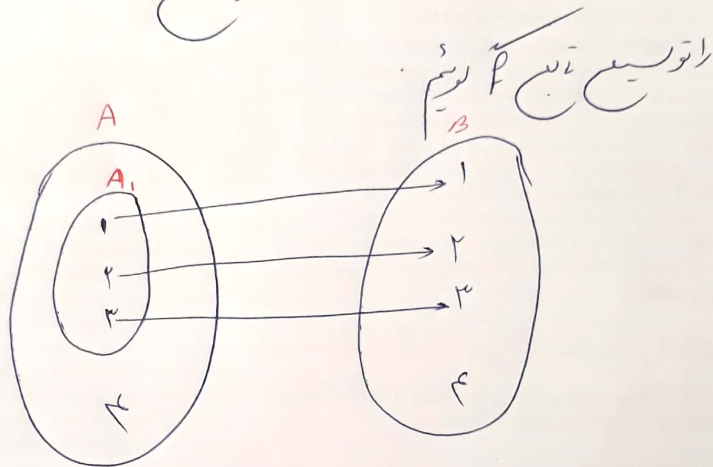


مثال:

$$f = \{(1, w), (2, u), (3, y)\}$$

$$f|_{A_1} = \{(1, w), (2, u)\}$$

تعریف: تابع توسیع فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و A_1 زیرمجموعه‌ای از A باشد.
 تابع f را به A_1 محدود می‌کنیم و آن را $f|_{A_1}$ می‌نامیم.
 به طریقی که $g(a) = f(a)$ باشد. $g: A_1 \rightarrow B$



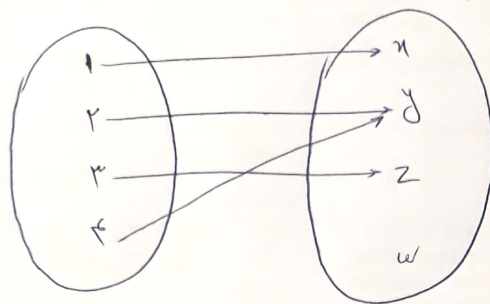
$$f = \{(1,1), (2,2), (3,2)\}$$

$$g = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ را تابع پوشش می‌گویند اگر $f(A) = B$.

یعنی: از هر $b \in B$ حداقل یک $a \in A$ وجود داشته باشد به طریقی که
 $f(a) = b$.

مثال: $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma), (4, \delta)\}$



مجموعه مقادیر = $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega\}$

برای $f(A) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$\Rightarrow f(A) \neq B$ تابع پوشش نیست.

نکته: برای مجموعه‌های متناهی A, B : $|A| = m \geq n = |B|$ ، تعداد

توانش پوشش از A به B عبارت است از

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m$$

$$= \binom{n}{n} n^m - \binom{n}{n-1} (n-1)^m + \dots +$$

$$+ \binom{n}{n-2} (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 1^m.$$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$

بنابر این تعداد توابع پویش از A به B عبارت است از:

حل: داریم $|A| = 4 > 3 = |B|$ بنابر این

$$\text{تعداد توابع پویش} = \binom{3}{1} 1^4 + \binom{3}{2} 2^4 - \binom{3}{3} 3^4$$

توابع خاص:

الف) هر مجموعه A ، $f: A \times A \rightarrow A$ را عمل دوتایی بر A نام

تعریف: فرض کنید $f: A \times A \rightarrow A$ یک سر در این صورت

الف) f ارتباطی تعویض پذیر داریم هرگاه $(a, b) \in A \times A$ داشته باشیم

$$f(a, b) = f(b, a).$$

ب) f ارتباطی شرکت پذیر داریم هرگاه $a, b, c \in A$ داشته باشیم

$$f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c)).$$

مثال: عمل دوتایی $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ تعریف می‌شود

$$f(a,b) = a + b - 3ab$$

در نظر بگیرید آیا f نسبت به ترفیق پذیری دگرگونی پذیر است؟

حل: ابتدا برای محاسبه $f(b,a)$ و $f(b,c)$ می‌بریم

$$f(b,c) = b + c - 3bc$$

$$\begin{aligned} f(b,a) &= b + a - 3ba = a + b - 3ab \\ &= f(a,b) \end{aligned}$$

بنابراین f نسبت به ترفیق پذیری دگرگونی پذیر است

$$\begin{aligned} f(f(a,b),c) &= f(a,b) + c - 3 f(a,b) \cdot c \\ &= a + b - 3ab - 3(a + b - 3ab) \cdot c \\ &= a + b - 3ab - 3ac - 3bc + 9abc \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 f(a, f(b, c)) &= a + f(b, c) - 3a f(b, c) \\
 &= a + (b + c - 3bc) - 3a(b + c - 3bc) \\
 &= a + b + c - 3bc - 3ab - 3ac + 9abc.
 \end{aligned}$$

برای چون

$$f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$$

است پس f تبسرت پذیر است.

مثال: آیا تابع $f(x, y) = 2x + y$ خاصیت جابجایی و تبسرت پذیری دارد.

$$f(y, x) = 2y + x \neq 2x + y = f(x, y)$$

پس خاصیت جابجایی ندارد.

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
 f(f(x, y), z) &= 2f(x, y) + z \\
 &= 2(2x + y) + z = 4x + 2y + z
 \end{aligned}$$

$$f(x, f(y, z)) = x + f(y, z)$$

$$= x + y + z$$

در این حالت شرکت پذیرنده.

ترکیب توابع وارون پذیر

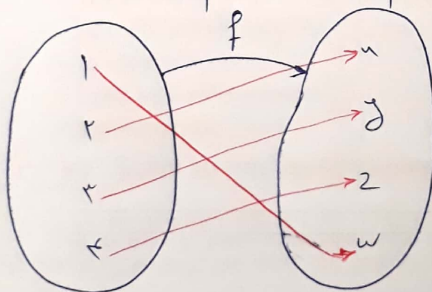
پس از آنکه توابع یک یک و توابع پوش را بررسی نمودیم، به توابع وارون
که هر دو ویژگی را دارند.

تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ تابع دوسویی گوئیم هر وقت f یک یک
و پوش باشد.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{u, v, z, w\}$ آنگاه تابع

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, z), (4, w)\}$$

دوسویی است زیرا هم یک یک و هم پوش است.



توجه: دوسویی باشد را در پذیر گوئیم. برای بدست آوردن معکوس یا

وارون تابع f ، باید معکوس اول دوم تابع f را جای کنیم. یعنی اگر

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid x \in A, y \in B\}.$$

مثال در تابع متقابل

$$f^{-1} = \{(w, 1), (v, 2), (y, 3), (z, 4)\}.$$

تعریف: تابع $I: A \rightarrow A$ را همانی گوئیم، اگر برای هر $a \in A$

$$I(a) = a.$$

تعریف: فرض کنید $f, g: A \rightarrow A$ باشند. تابع f و g

را با هم برابر گوئیم و می نویسیم $f = g$ اگر برای هر $a \in A$

$$f(a) = g(a).$$

مثال: فرض کنید $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f: z \rightarrow z$ و $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ را

$$f(n) = n = g(n) \quad \text{برای هر } n \in \mathbb{Z} \text{ داشته باشیم}$$

f و g با هم برابر هستند؟

تعریف: اگر دو تابع f و g به هم برابر باشند زیرا هر دو نام برابر نیست

تعریف: اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ توابع باشند

آن گاه $g \circ f: A \rightarrow C$ تابع ترکیب نام داریم

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ ، $C = \{x, y, z\}$

و $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$$

$$g = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}.$$

در این صورت $g \circ f$ را محاسبه کنید

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(a) = x \Rightarrow (1, x)$$

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(a) = x \Rightarrow (2, x)$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(b) = y \Rightarrow (3, y)$$

$$g \circ f(4) = g(f(4)) = g(c) = z \Rightarrow (4, z)$$

۴

سوال: دهم

$$g \circ f = \{ (1, x), (2, y), (3, z) \}.$$

فصل: فرض کنید $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x^2 + 5$$

مطلوب است محاسبه $f \circ g$ ، $g \circ f$ ؟

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + 5) \\ &= (x^2 + 5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(x^2) \\ &= (x^2)^2 + 5 \end{aligned}$$

مثال: اگر داشته باشیم $f: A \rightarrow B$ ، $g: B \rightarrow C$ ، $h: C \rightarrow D$ در این صورت

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

به عبارتی ترکیب دارای خاصیت شرکت پذیری است.

فرض کنید $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

با ضابطه زیر

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 5, \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

در این صورت

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

$$= h(g(x^2))$$

$$= h(x^2 + 5)$$

$$= \sqrt{(x^2 + 5)^2 + 2}$$

از طرف دیگر

$$(h \circ g) \circ f = (h \circ g)(f(x))$$

$$= (h \circ g)(x^2) = h(g(x^2))$$

$$= h(x^2 + 5) = \sqrt{(x^2 + 5)^2 + 2}$$

تکرار: $f: A \rightarrow A$ ، f تکرار

$$f^1 = f$$

$$f^{n+1} = f \circ f^n$$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $f: A \rightarrow A$:

$$f = \{(1, 2) (2, 3) (3, 1) (4, 2)\}.$$

در این صورت f^2 را حساب کنید.

$$f^2 = f \circ f$$

$$f^2(1) = f \circ f(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$$

$$f^2(2) = f \circ f(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

$$f^2(3) = f \circ f(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$$

$$f^2(4) = f \circ f(4) = f(f(4)) = f(2) = 3$$

$$f^2 = \{(1, 3) (2, 1) (3, 2) (4, 3)\}.$$

پایان