

فُتق محضه، برآر درایان و صحنی ماس.

می گفتم اگر $f(x, y)$ فُتق پذیر باشد آن آفت تغییرات f نسبت
به t در مقدار منتهی فُتق پذیر $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ برابر است:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

در نقطه $P_0(x_0, y_0) = P_0(g(t_0), h(t_0))$ این ماس آفت تغییرات

f نسبت به انترایس t شخص می کند. باید این علاوه بر جهت P_0 جهت

حرکت در مقدار منتهی نیز گسترش دارد.

تعریف: فُتق ماس f در $P_0(x_0, y_0)$ در جهت بردار u

$$u = u_1 i + u_2 j$$

عبارت است:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{u, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + s u_1, y_0 + s u_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

در نقطه P_0 در جهت بردار u مشتق را بیابید.

مثال: در جهت مشتق

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

در نقطه $P_0(1, 2)$ در جهت بردار $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)j$

حل:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{u, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + s \times \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1^2 + 2^2)}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(4 + \frac{4s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 5}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{4s}{\sqrt{2}} + s^2}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{4s}{\sqrt{2}}}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + s \right) = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

تعریف بردار گرادیان:

بردار گرادیان تابع $f(x, y)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ برداری است به نام

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

که با استاندارد از مشتقات جزئی f در نقطه P_0 بدست می آید.

همانطور که می دانید محاسبه مشتق مستقیماً با استاندارد از تعریف حدی آن

به ندرت صورت می گیرد و مشتق هجرت نیز از این قاعده مستثنی

است. می توانیم مشتق f در جهت بردار $\mathbf{u}$ در نقطه P_0 را

جهت بردار گرادیان مثبت داریم.

تفسیر: اگر مشتقات جزئی $f(x, y)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ تقریباً برابر باشند

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{u, P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot u$$

که در ضرب عددی بردار f در نقطه P_0 و u می باشد.

مثال: مطلوب است مشتق تابع

$$f(x, y) = x e^y + \cos(xy)$$

در نقطه $P_0 = (1, 0)$ در جهت $A = 3i - 4j$

حل: همانطور که در فصل اول گفتیم برای تعیین جهت A باید $|A|$

براندازد و این $|A|$ تقسیم کنیم

$$|A| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$u = \frac{A}{|A|} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$$

۴

حل سؤال جزئياً تابع f در نقطه $(2,0)$ را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y - y \sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^y - x \sin(xy) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(2,0)} = 2e^0 - 2 \times 0 = 2$$

بنابراین بردار گرادیان تابع f در نقطه $(2,0)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \nabla f_{(2,0)} &= \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \\ &= i + 2j \end{aligned}$$

بنابراین سؤال f در نقطه $(2,0)$ در جهت A برابر است با:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)_{(2,0),A} &= \nabla f \Big|_{(2,0)} \cdot u \\ &= (i + 2j) \cdot \left(\frac{3}{5} i - \frac{4}{5} j \right) \\ &= \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{5}{5} = -1 \end{aligned}$$

معادلات دربرداره جاس به نغزها تراز:

گرایش مشتق پذیر $f(x, y)$ در انتگرال $r = g(t)i + k(t)j$ دارای مقدار

ثابت c باشد در این صورت $f(g(t), k(t)) = c$ می باشد

و مشتق نری از هر دو طرف این نقطه ثابت t نغز می دهد که

گرایش f بر نغز r عمود است.

نکته: از آنجا که در هر نقطه (x_0, y_0) در انت f ، گرایش f به نغز

تزاری که از نقطه (x_0, y_0) می گذرد عمود است، این نکته ما را قادر می سازد

معادلات خطوط جاس به نغزها را بدست آوریم

این خطوط عبارت از خطوط نرمال گرایش f می باشد.

در واقع خطی که از نقطه $P_0(x_0, y_0)$ می گذرد و عمود بر بردار

$$N = Ai + Bj$$

می باشد معادله زیر است

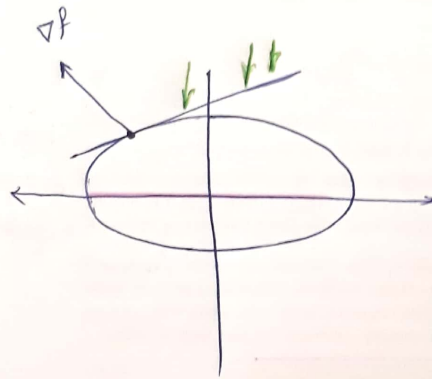
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

در هر یک از نقاط بالا

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 0$$

مثال: خطوط مماس بر دایره به بیض

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$



در نقطه $(-2, 1)$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(-2, 1)} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(-2, 1)} \mathbf{j}$$

$$= \frac{x}{2} \Big|_{(-2, 1)} \mathbf{i} + 2y \Big|_{(-2, 1)} \mathbf{j}$$

$$= -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

معادله خط مماس به این دایره

$$(-1)(x - (-2)) + (2)(y - 1) = (-1)(x + 2) + 2(y - 1) = 0$$

$$-u - 2 + 2y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -u + 2y = 4$$

پس

توانج سرشتیره:

در صورتی که f تابعی سرشتیره باشد در این صورت مشتق جهت تابع

$f(x, y, z)$ در جهت بردار $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ عبارت است از:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3$$

مثال: مطلوب است $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ در $P_0(1, 1, 0)$

در جهت $A = 2i - 3j + 2k$

$$|A| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} \\ = \sqrt{17} = \sqrt{17}$$

$$u = \frac{A}{|A|} = \frac{2}{\sqrt{17}} i - \frac{3}{\sqrt{17}} j + \frac{2}{\sqrt{17}} k$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1,0)} = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1,0)} = 0$$

از طرفی داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1,0)} = -2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1,0)} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(1,1,0)} = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(1,1,0)} = 1$$

پس داریم:

$$D_u f \Big|_{(1,1,0)} = (2i - 2j + k) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

* حالت دوم: صافی جاس = صاف

$$f(x, y, z) = c$$

صافی است در نقطه P عبور کند در P $\nabla f \Big|_P$ عمود است

برابر است

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_P (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_P (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_P (z - z_0) = 0$$

فصل: مطلوب است صحنی معادله و خط مماس بر آن

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

نقطه $P(1, 2, 4)$

خط مماس

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$= (2x) i + (2y) j + k$$

$$\nabla f|_{(1, 2, 4)} = (2 \times 1) i + (2 \times 2) j + k$$

$$= 2i + 4j + k$$

معادله صحنی معادله است

$$2(x-1) + 4(y-2) + 1(z-4) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 4y - 8 + z - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x + 4y + z = 14}$$

مقادیر اکسترم نقاط زین:

تقریب فرض کنید $f(x)$ روی ناحیه R تابعی نقطه (a, b) تقریب

نزدیک به در این صورت

۱) $f(a, b)$ ماکزیمم موضعی f است اگر در یک بازه مرکزی (a, b)

موجود باشد به طوری که برای هر (x, y) از دامنه f در این بازه

برقعه داشته باشیم

$$f(x, y) \leq f(a, b).$$

۲) $f(a, b)$ مینیمم موضعی f است اگر در یک بازه مرکزی (a, b)

موجود باشد به طوری که برای هر (x, y) از دامنه f در این بازه

تفاوت داشته باشیم

$$f(x, y) \geq f(a, b)$$

تقریباً اصول شش اول برای مقادیر اکسترم موضعی

در $f(x, y)$ یک نقطه درونی چون (a, b) از دامنه تعریف تابع
 دارای تابعی یا بیشینه موضعی یا کمترین موضعی باشد در مرتبه اول
 تابع در این نقطه موجود باشد، آنجا

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(a,b)} = 0$$

تعریف نقطه بحرانی:

یک نقطه درونی از دامنه تابع $f(x, y)$ که در آن هر دو f_x و f_y
 صفر باشند یا در آن یکی از هر دو f_x و f_y موجود نباشند
 نقطه بحرانی گوئیم

مثال: فرض کنید $f(x, y) = x^2 + y^2$. نقطه $(0, 0)$ نقطه بحرانی

این تابع است زیرا

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 2x = 0$$

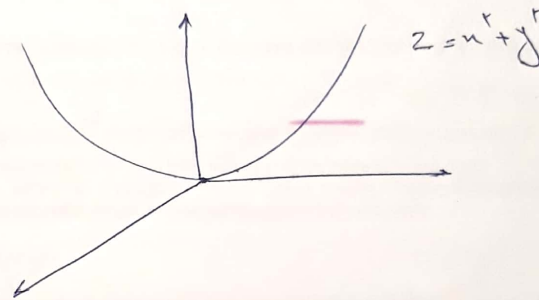
$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = 2y = 0$$

تعیین تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ دارای نقطه زینی است اگر در هر

دیسک باز به مرکز (a,b) نقاطی چون (x,y) از رانده باشد که

در آن $f(x,y) > f(a,b)$ و نقاطی چون (x,y) از رانده

باشد که در آن $f(x,y) < f(a,b)$.



تعیین آزمون مشتق دوم برای اکتانم ها موضعی

فرض کنید $f(x,y)$ مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن بر سر یک

به مرکز (a,b) باشد و باشد.

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

در این صورت داریم:

۱- اگر نقطه (a, b) راست‌یست

$$f_{xx} > 0, \quad f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

آن نقطه f در نقطه (a, b) دارای بیشترین موضعی است.

۲- اگر نقطه (a, b) راست‌یست

$$f_{xx} < 0, \quad f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

آن نقطه f در نقطه (a, b) دارای کمترین موضعی است.

۳- اگر نقطه (a, b) راست‌یست

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

آن نقطه f در نقطه (a, b) دارای نقطه زنی است.

۴- اگر نقطه (a, b) راست‌یست

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$$

آن نقطه f در نقطه (a, b) آزمون جواب نمی‌دهد.

مثال: مقدار اکسترم موضعی تابع

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

درست کنید

استراتژی یافتن خزش f را ملاحظه کنید

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x - 2$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - 2$$

حل برای این معادلات بحرانی را بدست آوریم

$$y - 2x - 2 = 0$$

$$x - 2y - 2 = 0$$

$$\begin{cases} y - 2x - 2 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$-3x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$\Rightarrow -2 - 2y - 2 = 0 \Rightarrow -2y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y = -2$$

بنابراین نقطه $(-2, -2)$ تنها نقطه ای است که تابع f در آن اکسترم دارد

حل داریم:

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1$$

بنابراین:

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2) \times (-2) - (1)^2$$

$$= 4 - 1 = 3 > 0$$

و $f_{xx} = -2 < 0$ بنابراین طبق قضیه نقطه $(-2, 2)$

رای ماکزیمم موضعی است.