

سے مائی

۹۸، ۱، ۲۳

جلد ہفتم و ہشتم

ذرات و ذرات

حل مسائل خطی غیر متجانس مرتبہ دوم

نرم طرز میں دئے گئے مسائل کے حل

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = p_3(x)$$

یہاں کے دیکھیں $p_1(x)$ ، $p_2(x)$ ، $p_3(x)$ متجانس ہیں

نوٹ: جواب عمومی اس کے لئے مسائل کے حل مجموعہ دو جواب y_p و y_h سے ملتا ہے۔
یہاں کے دیکھیں y_h جواب عمومی متجانس ہے یعنی

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

اس کے جواب y_p کے ساتھ ساتھ y_h کے جواب بھی ملے گا۔

جواب عمومی اس کے لئے مسائل کے حل مجموعہ دو جواب y_p و y_h سے ملتا ہے۔

$$y = y_h + y_p$$

حال روش دست آوردن جواب خصوصی y_p را بررسی می کنیم. چند روش بود در روش
 قرار می برد اما ساده ترین آن روشی است که در این روش ضرایب نامشخص می باشد. از این
 روش فقط در مواردی که حالات نامشخصی با ضرایب خطی هستند می توان
 استفاده کرد.

به این فرم می توانیم حالات به فرم زیر می باشد:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

از این روش فقط در حالات زیر می توان استفاده کرد.

حالت اول:

اگر $f(x)$ به فرم یک چند جمله ای از درجه n باشد

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

باشد در این صورت جواب خصوصی حالات به فرم زیر می باشد:

$$y_p = x^m (\text{یک چند جمله ای از درجه } n)$$

که در آن m تعداد ریشه‌ها صفر درگاه نهمی باشد.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$y'' - 4y = 3$$

گام اول: ابتدا جواب عمومی قسمت همجن را بدست می‌آوریم. داریم

$$y'' - 4y = 0$$

همانطور که در بخش مثال بیان کردیم معادله مشخصه این معادله همجن عبارت است از

$$r^2 - 4 = 0$$

چون معادله مشخصه یک معادله درجه ۲ است پس ریشه‌ها آن را به نرم زیر بدست می‌آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 0 - 4(1)(-4) = 16 > 0$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2} = \pm \frac{4}{2} = \pm 2$$

$$r_1 = 2 \quad , \quad r_2 = -2$$

بنابراین جواب عمومی تحت چنین شرایطی:

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{-r_1 x}$$

حل جواب خصوصی تحت چنین شرایطی داریم چون $f(x) = 3$

است یکنواخت چندجمله‌ای از درجه صفر (عدد ثابت) داریم پس
جواب تحت چنین شرایطی:

$$y_p = x^m \text{ (تک چندجمله‌ای از درجه صفر)}$$

از طرفی چون تعداد ریشه‌ها صفر باشد و صفر برابر صفر است یعنی $m=0$

$$y_p = x^0 (A) = A$$

بنابراین

حل چون y_p یک جواب خصوصی است و در فرایند است پس
باید در معادله در فرایند صحت کند بنابراین

$$y_p' = 0, \quad y_p'' = 0$$

۴

حال این معادله را در باره y حل می‌کنیم

$$0 - 4A - 3$$

$$\Rightarrow A = \frac{-3}{4} \Rightarrow y_p = -\frac{3}{4}$$

رشته جواب عمومی معادله را به فرم زیر می‌نویسیم

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{4}$$

حالت دوم

اگر $f(x)$ در باره $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ به فرم کلی

$$f(x) = M(x) e^{px}$$

باشد که در آن $M(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد در این صورت

جواب خصوصی معادله به فرم زیر می‌باشد

$$y_p = x^m e^{px} \quad (\text{یک چندجمله‌ای از درجه } n)$$

که در آن m تعداد ریشه‌های P در باره x می‌باشد

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$y'' - 7y' + 4y = (x-2)e^x$$

حل: چون $f(x) = (x-2)e^x$ است پس

$$p = 1, \quad M(x) = x-2$$

مراحل اول: ابتدا جواب عمومی همگ را بدست می آوریم

$$y'' - 7y' + 2y = 0$$

پس معادله مشخصه عبارت است از

$$r^2 - 7r + 2 = 0$$

پس ریشه ها معادله مشخصه نرم زیر را بدست می آوریم

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(2)$$

$$= 49 - 8 = 41 > 0$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$r_1 = \frac{7 + \sqrt{41}}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

$$r_2 = \frac{7 - \sqrt{41}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2/

ما دام این جواب عمومی نیست چنان عبارت است از:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

حال جواب خصوصی را بدست می آوریم.

چون $r_2 = 1$ است یعنی از ریشه ها برابر $p = 1$ است ما داریم $m = 1$ را می نازیم.

از طرف دیگر چون $M(x) = x - 2$ است پس چند جمله ای

درجه یک: نرم $Ax + B$ داریم.

در نتیجه جواب نت خصوصی: نرم زیر است

$$\begin{aligned} y_p &= x' (Ax + B) e^x \\ &= Ax^2 e^x + Bx e^x \end{aligned}$$

همانطور که در مثال قبل نیز شرح داریم چون y_p یک جواب

خصوصی است پس باید در معادله صدق کند ما داریم y_p را در معادله

در y_p مشتق می گیریم.

$$y'_p = \gamma A n e^{\tilde{n}} + A n^{\gamma} e^{\tilde{n}} + \beta e^{\tilde{n}} + \beta n e^{\tilde{n}}$$

$$y''_p = \gamma A e^{\tilde{n}} + \gamma A n^{\gamma} e^{\tilde{n}} + \gamma A n e^{\tilde{n}} + A n^{\gamma} e^{\tilde{n}} \\ + \beta e^{\tilde{n}} + \beta e^{\tilde{n}} + \beta n e^{\tilde{n}}$$

$$= A n^{\gamma} e^{\tilde{n}} + \gamma A n e^{\tilde{n}} + \gamma A e^{\tilde{n}} + \gamma \beta e^{\tilde{n}} + \beta n e^{\tilde{n}}$$

في الحل، y'_p, y''_p, y_p تساوي

$$\cancel{A n^{\gamma} e^{\tilde{n}}} + \gamma A n e^{\tilde{n}} + \gamma A e^{\tilde{n}} + \gamma \beta e^{\tilde{n}} + \cancel{\beta n e^{\tilde{n}}}} - \gamma A n e^{\tilde{n}} \\ - \gamma A n^{\gamma} e^{\tilde{n}} - \gamma \beta e^{\tilde{n}} - \gamma \beta n e^{\tilde{n}} + \gamma A n^{\gamma} e^{\tilde{n}} \\ + \gamma \beta n e^{\tilde{n}} = (n - \gamma) e^{\tilde{n}}$$

$$\Rightarrow -1 \cdot A n e^{\tilde{n}} + \gamma A e^{\tilde{n}} - \gamma \beta e^{\tilde{n}} = (n - \gamma) e^{\tilde{n}}$$

$$\Rightarrow e^{\tilde{n}} (-1 \cdot A n + \gamma A - \gamma \beta) = (n - \gamma) e^{\tilde{n}}$$

سأحلها

$$-1_0 A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{1_0}$$

$$2A - 5\beta = -2 \Rightarrow 2x - \frac{1}{1_0} - 5\beta = -2$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{1_0} - 5\beta = -2 \Rightarrow \frac{-2}{1_0} + 2 = 5\beta$$

$$\frac{-2+2_0}{1_0} = 5\beta \Rightarrow \frac{18}{1_0} = 5\beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\frac{18}{1_0}}{5} = \frac{18}{5_0} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{1_0} x^2 e^x + \frac{9}{25} x e^x$$

با پاسخ خاص عمومی و عبارت است از

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 e^{2x} + c_2 e^x - \frac{1}{1_0} x^2 e^x + \frac{9}{25} x e^x$$

حالت عمومی: اگر در شکل

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

$f(x)$ دارای فرم می

$$f(x) = M(x) \cos qx + N(x) \sin qx$$

۲۱

با استفاده از $M(u)$ و $N(u)$ دو چندجمله‌ای از درجه n می‌توان به دست آورد

فرم جواب عمومی به نرم زیر است:

$$y_p = x^m [R(u) \cos qx + S(u) \sin qx]$$

که در آن m تعداد ریشه $\pm iq$ در ضرایب است، $R(u)$ ، $S(u)$ دو چندجمله‌ای از درجه n می‌باشد.

مثال: جواب عمومی ضرایب زیر را بدست آورید.

$$y'' + 4y = 3 \cos 2x$$

حل: ابتدا جواب عمومی نسبت به همی را بدست می‌آوریم:

$$r^2 + 4 = 0$$

پس برای

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(4) = -16$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$$

عام جواب عمومی است

$$y_h = A \cos 2x + B \sin 2x$$

حل جواب خاص را بدست می آوریم

و داریم $f(x) = 2 \cos 5x$ چون 5 عدد صحیح و 2 عدد صحیح

است پس $m=0$ است در نتیجه

$$y_p = x^m [R(x) \cos qx + S(x) \sin qx]$$

$$= x^0 [A \cos 5x]$$

$$= A \cos 5x$$

چون $M(x) = 3$ است پس $R(x) = A$ در نظر می گیریم

نتیجه حالت اول، چون y_p جواب معادله است پس

باید در معادله صدق کند پس، مقدار مرتبه y_p را از y_p

منفی می کنیم

$$y'_p = -\omega A \sin \omega x$$

$$y''_p = -\omega^2 A \cos \omega x$$

با جایگزینی y_p ، y'_p ، y''_p داریم:

$$-\omega^2 A \cos \omega x + 4A \cos \omega x = 3 \cos \omega x$$

$$\Rightarrow -\omega^2 A \cos \omega x = 3 \cos \omega x$$

$$-\omega^2 A = 3 \Rightarrow A = \frac{-3}{\omega^2} = -\frac{1}{\omega^2}$$

$$y_p = -\frac{1}{\omega^2} \cos \omega x$$

بنابراین جواب عمومی معادله تفاضلی عبارت است از:

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

روش معمولی برای حل معادلات غیر خطی هملین: روش تفسیر یا ایترها
فرض کنید در معادله توانایی

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

توانی $p_1(x)$ ، $p_2(x)$ و $f(x)$ یکتا باشند. برای پیدا کردن جواب خصوصی
از روش تفسیر یا ایترها استفاده می‌کنیم. فرض کنید جواب عمومی معادله هملین
مناظر موجود باشد یعنی

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

جواب خصوصی را مناظر یا جواب عمومی در نظر می‌گیریم. با این تفاوت که می‌توان
به عنوان مثال از y_1 در نظر گرفت بنابراین داریم

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

$u(x)$ و $v(x)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0$$

باشد.

حل $u'(\omega)$ و $v'(\omega)$ را از روابط زیر بدست می آوریم:

$$u'(\omega) = \frac{-f(\omega) \delta_r}{\delta_1 \delta_r' - \delta_1' \delta_r}$$

$$v'(\omega) = \frac{f(\omega) \delta_1}{\delta_1 \delta_r' - \delta_1' \delta_r}$$

پس با استرال نری بدست می آوریم:

$$u(\omega) = - \int \frac{f(\omega) \delta_r}{\delta_1 \delta_r' - \delta_1' \delta_r} d\omega$$

$$v(\omega) = \int \frac{f(\omega) \delta_1}{\delta_1 \delta_r' - \delta_1' \delta_r} d\omega$$

مثال: جواب عمومی معادله تفاضلی زیر را بدست آورید.

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos 3x}$$

استاد جواب عمومی معادله را بدست می آوریم

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -4 < 0$$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm 2i}{2} = \frac{1(-1 \pm 2i)}{2} = -1 \pm i$$

$$\text{حيث } q=1, p=-1$$

$$y_h = e^{-x} (A \cos u + B \sin u)$$

$$y_1 = e^{-x} \cos u \rightarrow y_1' = -e^{-x} \cos u + e^{-x} \sin u$$

$$y_2 = e^{-x} \sin u \rightarrow y_2' = -e^{-x} \sin u + e^{-x} \cos u$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-x} \cos u (-e^{-x} \sin u + e^{-x} \cos u) - (-e^{-x} \cos u + e^{-x} \sin u) e^{-x} \sin u$$

$$= +e^{-2x} \cos u \sin u - e^{-2x} \cos^2 u + e^{-2x} \sin^2 u - e^{-2x} \sin u \cos u$$

$$= e^{-2x} (\cos^2 u - \sin^2 u) = e^{-2x}$$

$$\rightarrow u(x) = \int \frac{-\frac{e^{-x}}{\cos t_n} x e^{-x} \sin x}{e^{-x_n}} dx$$

$$= \int \frac{-e^{-x_n} \sin x}{\cos t_n e^{-x_n}} dx$$

$$= \int \frac{-\sin x}{\cos t_n} dx$$

$$v(x) = \int \frac{\frac{e^{-x}}{\cos t_n} x e^{-x} \cos u}{e^{-x_n}} dx$$

$$= \int \frac{\frac{e^{-x_n} \cos u}{\cos t_n}}{e^{-x_n}} dx = \int \frac{\cos u}{\cos t_n} dx$$

تمام جواب معادله برابر است با:

$$y_p = u(x) y_1 + v(x) y_2$$

$$= \int \frac{-\sin u}{\cos t_n} dx x e^{-x} \cos u + \int \frac{\cos u}{\cos t_n} dx x e^{-x} \sin u$$