

4

دانشکده فنی و حرفه ای دختران شیراز



آموزشکده فنی دختران الزهرا

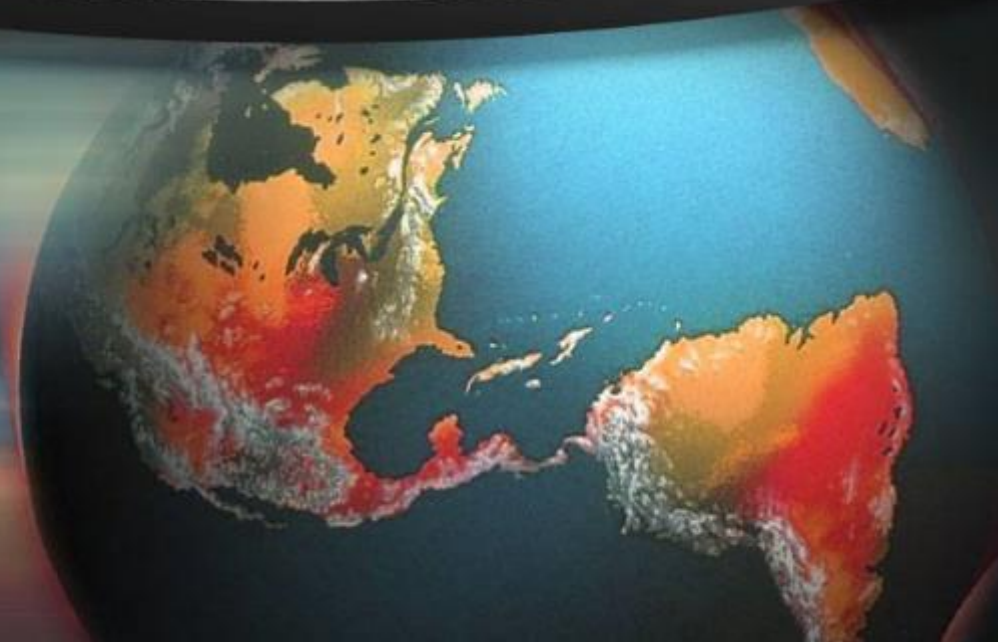
ریاضی عمومی - رشته هنر

مدرس و مولف جزوه:

دکتر نوشاد

منبع:

ریاضی مقدماتی، آقای گرایه چیان



فصل دوم:

* چند جمله ای ها

* اتحاد و تجزیه

* عبارات گویا

جلسه چهارم : اتحاد و تجزیه



بخش دوم : اتحاد و تجزیه

۱- اتحاد مربع دو جمله ای

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \left(\text{جمله اول} \right)^2 \pm 2 \left(\text{جمله اول} \right) \left(\text{جمله دوم} \right) + \left(\text{جمله دوم} \right)^2$$

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

$$(\Delta x - y)^2 = (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)(y) + y^2 = 2\Delta x^2 - 10xy + y^2$$



۲- اتحاد مزدوج

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\left(\text{جمله اول}\right)^2 - \left(\text{جمله دوم}\right)^2$$

$$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$$

$$(3x - 5y)(3x + 5y) = (3x)^2 - (5y)^2 = 9x^2 - 25y^2$$

$$(a^2 + 3)(a^2 - 3) = (a^2)^2 - (3)^2 = a^4 - 9$$



۳- اتحاد مربع سه جمله ای

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\left(\text{جمله اول}\right)^2 + \left(\text{جمله دوم}\right)^2 + \left(\text{جمله سوم}\right)^2 + 2\left(\text{اول}\right)\left(\text{دوم}\right) + 2\left(\text{اول}\right)\left(\text{سوم}\right) + 2\left(\text{دوم}\right)\left(\text{سوم}\right)$$

$$\begin{aligned}(3x - 2y + 5z)^2 &= (3x)^2 + (-2y)^2 + (5z)^2 + 2(3x)(-2y) + 2(3x)(5z) + 2(-2y)(5z) \\ &= 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 12xy + 30xz - 20yz\end{aligned}$$



۴- اتحاد یک جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\left(\text{جمله مشترک}\right)^2 + \left(\text{جمع جملات غیر مشترک}\right) + \left(\text{ضرب جملات غیر مشترک}\right)$$

$$(x + 3)(x + 7) = x^2 + (3 + 7)x + (3)(7) = x^2 + 10x + 21$$

$$(2x - 5)(2x + 3) = (2x)^2 + (-5 + 3)(2x) + (-5)(3)$$

$$= 4x^2 - 4x - 15$$



۵- اتحاد مجموع مکعبات دو جمله ای (اتحاد چاق و لاغر)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \left(\text{جمله اول} \right)^3 \pm \left(\text{جمله دوم} \right)^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3$$

$$(3a + 2)(9a^2 - 6a + 4) = (3a)^3 + 2^3 = 27a^3 + 8$$



۶- اتحاد مکعب دو جمله ای

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3(ab)(a + b) = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3(ab)(a - b) = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 8 + 3(2x)(x + 2) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$$

$$(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 27y^3 - 3(6xy)(2x - 3y) = 8x^3 - 27y^3 - 36x^2y + 54xy^2$$



چند نکته از اتعاده‌ها

$$۱. x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$۲. x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$۳. (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

$$۴. (x - y)^2 - (x + y)^2 = -4xy$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3(ab)(a + b)$$

$$۵. x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3(ab)(a - b)$$

$$۶. x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$



تمرین) اگر $x + y = 10$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^2 + y^2$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۱ داریم :

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (10)^2 - 2(5) = 100 - 10 = 90$$

تمرین) اگر $a - b = 8$ و $ab = 6$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۲ داریم :

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (8)^2 + 2(6) = 64 + 12 = 76$$



تمرین) اگر $x - y = 5$ و $xy = 4$ باشد، حاصل $x^3 - y^3$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۶ داریم:

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = (5)^3 + 3(4)(5) = 125 + 60 = 185$$

تمرین) اگر $x + \frac{1}{x} = 10$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۵ داریم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x \times \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = (10)^3 - 3(1)(10) = 1000 - 30 = 970$$



کاربرد اتحادها

۱. در محاسبه‌های ریاضی و ساده کردن عبارت‌های جبری می‌توان از اتحادها استفاده کرد.

مثال : به کمک اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 \quad \text{الف)}$$

الف) با استفاده از اتحادهای مربع دو جمله‌ای داریم:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$



$$\text{ب) } (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

ب) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(x+1)(x-1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$$

$$\text{ج) } (x+2)(x^2-2x+4) - (x-2)(x^2+2x+4)$$

ج) با استفاده از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله‌ای داریم:

$$(x+2)(x^2-2x+4) - (x-2)(x^2+2x+4) = (x^3+2^3) - (x^3-2^3) = x^3+8 - x^3+8 = 16$$


۲. می توان از اتحادها برای حاصل ضرب اعداد و به توان رساندن آنها استفاده کرد.

$$201^2 = (200+1)^2 = (200)^2 + 2(200)(1) + 1^2 = 40000 + 400 + 1 = 40401$$

$$298 \times 302 = (300-2)(300+2) = 300^2 - 2^2 = 90000 - 4 = 89996$$

۳. می توان در محاسبه رادیکالها از اتحادها استفاده نمود.

$$(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1) = (2\sqrt{3})^2 - 1^2 = 12 - 1 = 11$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$



تجزیه چند جمله ای

تبدیل یک چند جمله ای را به حاصل ضرب چند عامل، تجزیه چند جمله ای می گوئیم.

در این روش برای تبدیل چند جمله ای به حاصل ضرب ابتدا بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک جمله های آن را محاسبه می کنیم؛ اگر جواب آن برابر یک نباشد هر یک از جمله ها را بر آن تقسیم می کنیم.

۱- فاکتورگیری

$$15x^3 - 25x^2y = 5x^2(3x - 5y)$$

$$26a^3b^2 - 13a^2b^3c + 39a^2b^2 = 13a^2b^2(2a - bc + 3)$$

$$a(x + 2) + b(x + 2) = (x + 2)(a + b)$$



۲- استفاده از اتحادها در تجزیه

۱-۲ اتحاد مربع مجموع و تفاضل دو جمله ای

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad , a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 = (2x - 3)^2$$

$$a^2 + 10ab + 25b^2 = a^2 + 2(a)(5b) + (5b)^2 = (a + 5b)^2$$



۲-۲ اتحاد جمله مشترک

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 10 & a &= 2 \\ & \Rightarrow & & \\ a + b &= 7 & b &= 5 \end{aligned}$$

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 7)(x - 1)$$

$$-8 = \text{جمع و } 7 = \text{ضرب}$$

$$4x^2 - 8x - 12 = 4(x^2 - 2x - 3) = 4(x - 3)(x + 1)$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)(2x - 3) = (2x - 3)^2$$



نکته : در صورتی که نتوانیم از ضریب x^2 فاکتور بگیریم از روش زیر که به روش A مشهور است استفاده می کنیم.

روش A را با ذکر یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید می خواهیم عبارت سه جمله ای $3x^2 - 7x + 4$ را تجزیه کنیم. عبارت را برابر A در نظر می گیریم و طرفین آن را در ضریب جمله ی درجه ی بالاتر، ضرب می

$$A = 3x^2 - 7x + 4$$

$$3A = (3x)^2 - 7(3x) + 12$$

کنیم.

حال دنبال دو عدد می گردیم که جمعشان -7 و ضربشان 12 شود؛ این دو عدد -3 و -4 هستند،

$$3A = (3x - 3)(3x - 4)$$

$$A = (x - 1)(3x - 4)$$

$$3A = 3(x - 1)(3x - 4)$$



فصل ۲ ، بخش ۲ - نوشاد

$$A = 5t^2 - 4t - 1$$

$$\Delta A = (\Delta t)^2 - 4(\Delta t) - 5$$

$$\Delta A = (\Delta t - 5)(\Delta t + 1)$$

$$\Rightarrow A = (t - 1)(5t + 1)$$

$$-2x^2 + 5x - 3$$

$$-2A = (-2x)^2 + 5(-2x) + 6$$

$$-2A = (-2x + 3)(-2x + 2)$$

$$\Rightarrow A = (-2x + 3)(x - 1)$$



۲-۳ اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

۲-۴ اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله ای

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad , a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$27a^3 + b^3 = (3a)^3 + b^3 = (3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)$$



۲-۳ اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$$

۲-۴ اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله ای

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad , \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$27a^3 + b^3 = (3a)^3 + b^3 = (3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)$$



۳- دسته بندی

در چند جمله‌ای‌هایی که معمولاً بیش از سه جمله داشته باشند، لازم است ابتدا چند جمله‌ای را دسته‌بندی کرده سپس به کمک فاکتورگیری یا اتحادها آن را تجزیه نمود.

$$\Delta x + ax + \Delta m + am$$

$$(\Delta x + ax) + (\Delta m + am) = x(\Delta + a) + m(\Delta + a) = (\Delta + a)(x + m)$$

$$\Delta a^3 - 2 \cdot ab^2 - 3a^2b + 12b^3$$

$$(\Delta a^3 - 2 \cdot ab^2) - (3a^2b + 12b^3) = \Delta a(a^2 - 4b^2) - 3b(a^2 - 4b^2)$$

$$= (a^2 - 4b^2)(\Delta a - 3b) = (a - 2b)(a + 2b)(\Delta a - 3b)$$



تمرین

حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها بنویسید.

$$(7 - 3x)(7 + 3x)$$

$$(2a - 5b)(2a + 3b)$$

$$(2a + b)^2 + (2a - 3b)^2$$

$$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$$

چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 - 5x - 24$$

$$4a^3 - 24ab^2 - 3a^2b + 12b^3$$

$$5a^3b - 20ab^3$$

$$x^3 - 7x^2 + 7x - 49$$



به سان رود که در شیب دره سر به سنگ میزند؛

رونده باش...

THE END

امید هیچ معجزی ز مرده نیست؛

زنده باش...

